حل یک دسته از معادلات خطی با استفاده از متد گوس سایدل

در کیس های خاص، مانند زمانی که اندازه یک سیستم معادلات بزرگ است، روش تکراری برای حل معادلات باصرفه تر است. متدهای تکراری، نظیر متد گوس-سایدل، به کاربر قابلیت کنترل خطای گرد کردن را میدهد. همچنین، اگر فیزیک مساله به خوبی تبیین شده باشد، حدس های اولیه که برای حل های تکراری مهم و مورد نیاز است، میتوانند با دقت بیشتری به سمت همگرایی سریعتر بروند. شکل عمومی n معادله و n مجهول در معادله زیر آورده شده است:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = c_1 \tag{1}$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = c_2$$

.

.

.

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n = c_n$$

اگر درایه های قطری غیر صفر باشند، هر معادله برای مجهول متناظر بازنویسی میشود، به این صورت که، معادله اول در سمت چپ با x_1 بازنویسی میشود، و معادله دوم در سمت چپ با x_2 بازنویسی میشود و همینطور به صورت زیر ادامه پیدا میکند. هر معادله به صورت زیر بازنویسی میشود.

$$x_1 = \frac{c_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \ldots - a_{1n}x_n}{a_{11}} \tag{2}$$

$$x_2 = \frac{c_2 - a_{21}x_2 - a_{23}x_3 - \ldots - a_{2n}x_n}{a_{22}}$$

$$x_n = \frac{c_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \ldots - a_{n,n-1}x_{n-1}}{a_{nn}}$$

حالا برای پیدا کردن x_i ها، ابتدا یک حدس اولیه برای x_i ها میزنیم و سپس از معادلات بازنویسی شده برای محاسبه حدس های جدید استفاده میکنیم. به یاد داشته باشید که روش گوس سایدل از جدیدترین تخمین برای محاسبه

تخمین های بعدی استفاده میکند. یعنی به عنوان مثال اگر حدس اولیه مجهول x_1 عدد ۱۰۰ بوده است، و پس از حل معادله مربوط به مجهول x_1 مقدار آن به ۱۵۰ تغییر کرد، در روش گوس سایدل برای محاسبه x_2 دیگر از حدس اولیه x_1 یعنی ۱۰۰ استفاده نمیکنیم بلکه به روز ترین جواب بدست آمده از x_1 یعنی ۱۵۰را در معادلات بعدی استفاده میکنیم.

بعدر از پایان هر تکرار، ما باید مقدار خطای نسبی را برای هر x_i محاسبه کنیم. این عبارت خطا با رابطه زیر بدست می آید:

$$\left|\epsilon_a\right|_i = \left|\frac{x_i^{new} - x_i^{old}}{x_i^{new}}\right| \times 100 \qquad (۳)$$

که x_i جدید، جدیدترین مقدار بدست آمده از x_i است، و x_i قدیم، مقدار قبلی x_i است. زمانی که میزان خطای نسبی برای هر x_i کمتر از تولرانس از قبل تعریف شده شود، حل تکراری متوقف خواهد شد.

تئوری همگرایی متد گوس سایدل:

اگر A یک ماتریس غالب قطری باشد، متد گوس سایدل برای هر ماتریس آغازی x (حدس اولیه) همگرا خواهد شد. این شرط یک شرط کافی است اما لازم نیست.

مفهوم غالبیت قطری به صورت زیر تعریف میشود:

ماتریس A در رابطه $[A][X]=[C]$ غالب قطری است اگر:

برای همه i ها رابطه زیر برقرار باشد:

$$\left|a_{ii}\right| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \left|a_{ij}\right| \qquad (۴)$$

برای حداقل یک i رابطه زیر برقرار باشد:

$$\left|a_{ii}\right| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \left|a_{ij}\right| \qquad (۵)$$

مثال:

با استفاده از متد گوس سایدل دسته معادلات خطی زیر را حل کنید و مقدار مجهولات را بدست آورید:

$$12x_1+3x_2-5x_3=1 \tag{۶}$$

$$x_1+5x_2+3x_3=28$$

$$3x_1+7x_2+13x_3=76$$

از $x_1=1$، $x_2=0$ و $x_3=1$ به عنوان حدس اولیه استفاده کنید و تا دو تکرار جلو بروید.

حل:

ماتریس ضرایب به صورت زیر است:

$$[A]=\begin{bmatrix} 12 & 3 & -5 \\ 1 & 5 & 3 \\ 3 & 7 & 13 \end{bmatrix} \tag{۷}$$

با استفاده از روش زیر غالبیت قطری ماتریس را بررسی میکنیم:

$$|a_{11}|=|12|\geq|a_{12}|+|a_{13}|=|3|+|-5|=8 \tag{۸}$$

$$|a_{22}|=|5|\geq|a_{21}|+|a_{23}|=|1|+|3|=4$$

$$|a_{33}|=|13|\geq|a_{31}|+|a_{32}|=|3|+|7|=10$$

پس شروط لازم برای غالبیت قطری برقرار است و روش گوس سایدل بی قید و شرط پایدار است و حل حتما همگرا خواهد شد.

$$x_1=\frac{1-3x_2+5x_3}{12} \tag{۹}$$

$$x_2=\frac{28-x_1-3x_3}{5}$$

$$x_3=\frac{76-3x_1-7x_2}{13}$$

تکرار اول:

$X_1=0.5000$, $X_2=4.9000$, $X_3=3.0923$

با افزایش تکرارها و محاسبه خطاها در هر مرحله به جواب معادله مورد نظر نزدیک میشویم. مقادیر جواب ها در هر تکرار و میزان خطاها در جدول زیر نشان داده شده اند.

جدول۱: جواب های حاصل از حل تکراری و میزان خطای نسبی هر تکرار در مساله حاضر با استفاده از روش گوس سایدل

Iteration	x_1	$\lvert\epsilon_a\rvert_1$ %	x_2	$\lvert\epsilon_a\rvert_2$ %	x_3	$\lvert\epsilon_a\rvert_3$ %
1	0.50000	100.00	4.9000	100.00	3.0923	67.662
2	0.14679	240.61	3.7153	31.889	3.8118	18.874
3	0.74275	80.236	3.1644	17.408	3.9708	4.0064
4	0.94675	21.546	3.0281	4.4996	3.9971	0.65772
5	0.99177	4.5391	3.0034	0.82499	4.0001	0.074383
6	0.99919	0.74307	3.0001	0.10856	4.0001	0.00101

کد فرترن متد گوس سایدل برای حل دسته معادلات خطی:

```
Program GaussSeidel

implicit none

integer,parameter::n=3   !parameters does not change at all
(پارامترهای تعریف شده در این قسمت اصلا تغییر نخواهند کرد)

Real,Dimension(n,n)::a

Real,Dimension(n)::c

Real,Dimension(n)::x

integer::i,j,itteration,k

!Eu : Error that user want to obtain (خطای تعریف شده توسط کاربر)
```