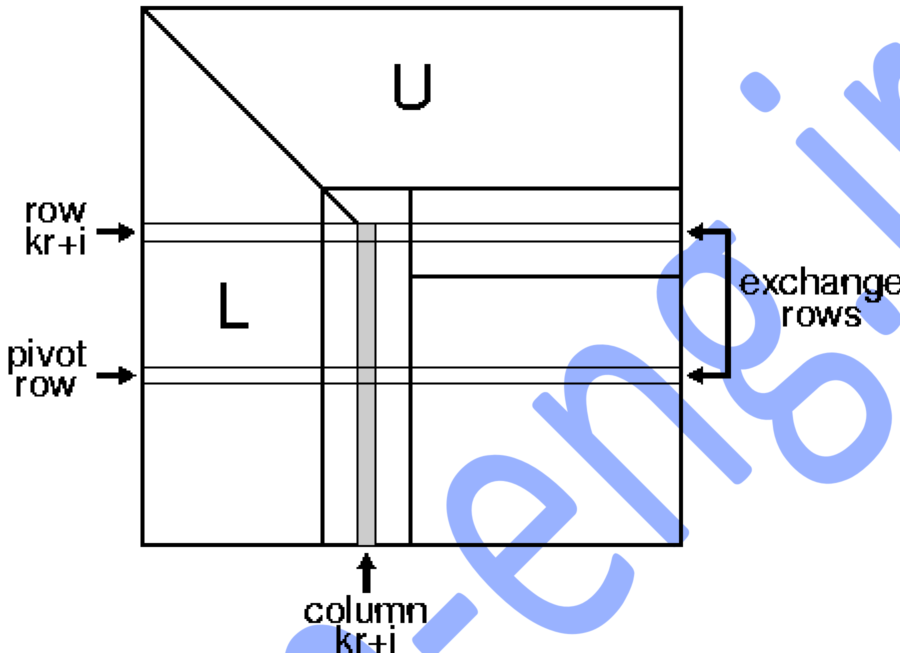
گزارش کامل فارسی متد تجزیه LU (روش چولسکی) به همراه کد متلب و مثال های کاربردی



معرفی

میتوان نشان داد که هر ماتریس مربعی A میتواند به صورت ضرب یک ماتریس پایین مثلثی L و یک ماتریس بالا مثلثی U بیان شود، به عبارتی:

$$\mathbf{A} = \mathbf{LU} \quad (۱)$$

فرآیند محاسبه L و U برای یک ماتریس معلوم A به عنوان تجزیه LU یا فاکتورگیری LU شناخته میشود. تجزیه LU یک عملیات با مقدار مشخص نیست، به عبارت دیگر بدون اعماد قیود خاص بر روی L و U، بی نهایت حالت برای ماتریس های بالا مثلثی و پایین مثلثی ایجاد شده وجود دارد. این قیود اعمالی یک نوع تجزیه را از نوع دیگر متمایز میکند. سه تا از عمومی ترین تجزیه های مورد استفاده در جدول زیر لیست شده اند.

جدول ۱: متدهای تجزیه LU

Name	Constraints
Doolittle's decomposition	$L_{ii} = 1, \quad i = 1, 2, \ldots, n$
Crout's decomposition	$U_{ii} = 1, \quad i = 1, 2, \ldots, n$
Choleski's decomposition	$\mathbf{L} = \mathbf{U}^T$

بعد از تجزیه A ، حل کردن معادله Ax=b ساده است. در ابتدا ما معادله را به صورت Lux = b بازنویسی میکنیم. با استفاده کردن از تبدیل Ux = y، معادله به صورت زیر میشود:

$$Ly = b$$

که به وسیله جایگزینی رو به جلو برای y حل خواهد شد. سپس :

$$Ux = y$$

که با فرآیند جایگزینی از انتها، مقدار x به دست خواهد آمد.

مزیت های روش تجزیه LU نسبت به روش حذفی گوس این است که وقتی یکبار ماتریس A تجزیه شد، ما میتوانیم Ax=b را برای تعداد زیادی از بردارهای ثابت b حل کنیم. هزینه هر حل اضافی نسبتا پایین است، چون که عملیات جایگزینی از ابتدا و انتها نسبت به فرآیند تجزیه خیلی زمان کمتری را مصرف میکند.

تجزیه به روش چولسکی (Choleski)

تجزیه به روش چولسکی $A=LL^T$ دو محدودیت دارد:

- چون ضرب ماتریسی LL^T متقارن است، نیاز است که تجزیه چولسکی A متقارن باشد.
- فرآیند تجزیه شامل گرفتن ریشه های ترکیبات خاصی از المان های ماتریس A است. میتوان نشان داد که ریشه های اعداد منفی فقط وقتی A به صورت مثبت تعریف شده باش، قابل صرفنظر هستند.

هرچند که تعداد عملیات طولانی در همه متدهای تجزیه تقریبا یکسان است، تجزیه چولسکی یک روش محبوب و عمومی برای حل همزمان معادلات نیست، این عمدتا به دلیل محدودیت هایی است که در بالا ذکر شده است. متد چولسکی با وجود محدودیت های خود یک روش ارزشمند است زیرا که در برخی مسائل مانند تبدیلات مسائل مقدار ویژه کاربرد فراوانی دارد.

بیایید یک نگاهی به تجزیه چولسکی بیندازیم:

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T \qquad (۲)$$

برای یک ماتریس ۳*۳:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{11} & L_{21} & L_{31} \\ 0 & L_{22} & L_{32} \\ 0 & 0 & L_{33} \end{bmatrix}$$

پس از محاسبه ضرب ماتریسی در سمت راست داریم:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11}^2 & L_{11}L_{21} & L_{11}L_{31} \\ L_{11}L_{21} & L_{21}^2 + L_{22}^2 & L_{21}L_{31} + L_{22}L_{32} \\ L_{11}L_{31} & L_{21}L_{31} + L_{22}L_{32} & L_{31}^2 + L_{32}^2 + L_{33}^2 \end{bmatrix} \qquad (۳)$$

توجه کنید که ماتریس سمت راست متقارن است، همانطور که قبلا بیان شد. با معادلسازی ماتریس A و LL^T به صورت المان به المان، ما شش معادله (به سبب تقارن فقط المان های بالا مثلثی یا پایین مثلثی باید در نظر گرفته شود) و شش مجهول اجزای L بدست میاوریم. با حل کردن معادلات با توجه به روش های خاص موجود، این امکان دارد که فقط یک مجهول در هر معادله داشته باشیم.

سهم پایین مثلثی هر ماتریس را در معادله ۳ در نظر بگیرید (برای بالا مثلثی هم همین کار را انجام میدهیم) .با معادل قرار دادن المان ها در ستون اول، با ردیف اول آغاز میکنیم و به سمت پایین میرویم. ما میتوانیم L_{11} و L_{21} و L_{31} را به صورت زیر محاسبه کنیم.

$$A_{11} = L_{11}^2 \qquad L_{11} = \sqrt{A_{11}}$$
$$A_{21} = L_{11}L_{21} \qquad L_{21} = A_{21}/L_{11}$$
$$A_{31} = L_{11}L_{31} \qquad L_{31} = A_{31}/L_{11}$$

ستون دوم ، با ردیف دوم آغاز میگردد، که منجر به محاسبه L_{22} و L_{32} میشود.

$$A_{22} = L_{21}^2 + L_{22}^2 \qquad L_{22} = \sqrt{A_{22} - L_{21}^2}$$
$$A_{32} = L_{21}L_{31} + L_{22}L_{32} \qquad L_{32} = (A_{32} - L_{21}L_{31})/L_{22}$$

سپس سطر دوم و ستون دوم به ما مقدار L_{33} را میدهد.

$$A_{33} = L_{31}^2 + L_{32}^2 + L_{33}^2 \qquad L_{33} = \sqrt{A_{33} - L_{31}^2 - L_{32}^2}$$

ما اکنون میتوانیم نتایج را برای یک ماتریس $n \times n$ برون یابی کنیم. ما مشاهده کردیم که المان های نوعی در قسمت پایین مثلثی ماتریس LL^T به فرم زیر هستند:

$$(\mathbf{LL}^T)_{ij} = L_{i1}L_{j1} + L_{i2}L_{j2} + \cdots + L_{ij}L_{jj} = \sum_{k=1}^{j} L_{ik}L_{jk}, \quad i \geq j$$

معادل قرار دادن این ترم ها با المان های متناظر در ماتریس A منجر به رابطه زیر میگردد:

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^{j} L_{ik}L_{jk}, \quad i = j, j+1, \ldots, n, \quad j = 1, 2, \ldots, n \tag{۴}$$

رنج یا محدوده اندیس ها محدوده المان های بخش پایین مثلثی را نشان میدهد. برای ستون اول $(j=1)$، ما از معادله ۴ داریم:

$$L_{11} = \sqrt{A_{11}} \qquad L_{i1} = A_{i1}/L_{11}, \quad i = 2, 3, \ldots, n \tag{۵}$$

با رفتن به ستون بعدی، ما مشاهده میکنیم که مجهول معادله ۴، L_{ij} است. با در نظر گرفتن ترم های شامل L_{ij} خارج از سیگما یا عمل جمع، داریم:

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^{j-1} L_{ik}L_{jk} + L_{ij}L_{jj}$$

اگر $i=j$ باشد (ترم قطری)، حل به صورت زیر است: