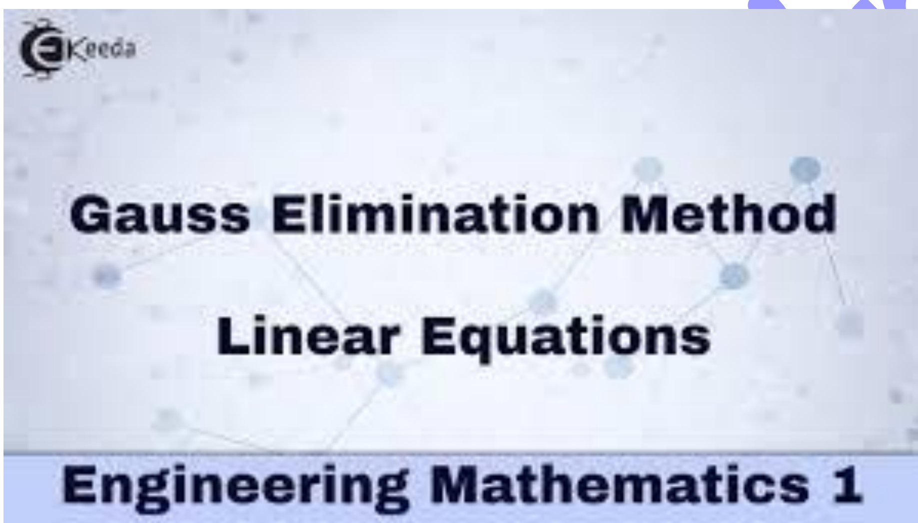
گزارش فارسی حل دسته معادلات خطی به کمک روش حذفی گوس به همراه کد متلب با توضیحات کامل

(Gauss elimination method)



مقدمه

روش حذفی گوس یکی از عمومی ترین و شناخته شده ترین متدها برای حل همزمان معادلات است. این متد از دو بخش تشکیل شده است: فاز حذف و فاز حل. عملکرد یا هدف فاز حذف این است که معادلات را به فرم $Ux = c$ در بیاورد. پس از این مرحله، معادلات به وسیله جایگذاری از انتها حل خواهند شد. به منظور اینکه روش را شرح دهیم بگذارید معادلات زیر را حل کنیم:

$$4x_1 - 2x_2 + x_3 = 11 \qquad \text{(a)}$$
$$-2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -16 \qquad \text{(b)}$$
$$x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 17 \qquad \text{(c)}$$

فاز حذف: فاز حذف از عملگر های ابتدایی جهت رسیدن به هدف خود استفاده میکند. این روش با ضرب کردن یک معادله (معادله j) در ثابت λ و سپس کم کردن آن از معادله دیگر (معادله i) به هدف خود میرسد. توصیف نمادین این عملکرد به صورت زیر است:

$$\text{Eq. }(i) \leftarrow \text{Eq. }(i) - \lambda \times \text{Eq. }(j) \qquad (۱)$$

معادله ای که از معادله ی دیگر کم میشود معادله محوری (pivot equation) نامیده میشود. ما روند حذف را با انتخاب معادله a به عنوان معادله محوری آغاز میکنیم و ضریب λ را به گونه ای انتخاب میکنیم که x_1 را از معادلات b و c حذف کنیم.

$$\text{Eq. (b)} \leftarrow \text{Eq. (b)} - (-0.5) \times \text{Eq. (a)}$$
$$\text{Eq. (c)} \leftarrow \text{Eq. (c)} - 0.25 \times \text{Eq. (a)}$$

پس از این تبدیلات معادلات به صورت زیر خواهد شد:

$$4x_1 - 2x_2 + x_3 = 11 \qquad \text{(a)}$$
$$3x_2 - 1.5x_3 = -10.5 \qquad \text{(b)}$$
$$-1.5x_2 + 3.75x_3 = 14.25 \qquad \text{(c)}$$

در اینجا اولین مرحله به پایان رسیده است. بنابراین ما (b) ر ابه عنوان معادله محوری در نظر میگیریم و x_2 را از معادله c حذف می کنیم.

$$\text{Eq. (c)} \leftarrow \text{Eq. (c)} - (-0.5) \times \text{Eq. (b)}$$

که منجر به معادلات زیر میشود:

$$
\begin{aligned}
4x_1 - 2x_2 + x_3 &= 11 && \text{(a)}\\
3x_2 - 1.5x_3 &= -10.5 && \text{(b)}\\
3x_3 &= 9 && \text{(c)}
\end{aligned}
$$

فاز حذف اکنون کامل شده است. معادلات اصلی به وسیله معادلات معادل جایگزین شده اند که این معادلات به وسیله جایگذاری از انتها به راحتی حل میشوند. همانطور که قبلا اشاره شد، ماتریس تکمیل شده، یا ماتریس ترکیب ماتریس ضرایب و معلومات، (augmented) که در زیر آمده است یک روش مناسب برای انجام محاسبات ماتریسی و بدست آوردن جواب معادلات است. که به صورت زیر نوشته خواهد شد:

$$
\left[\begin{array}{rrr|r}
4 & -2 & 1 & 11\\
-2 & 4 & -2 & -16\\
1 & -2 & 4 & 17
\end{array}\right]
$$

و معادلات معادل به وسیله پاس اول و دوم روش حذفی گوس به صورت زیر خواهند شد:

$$
\left[\begin{array}{lrr|r}
4 & -2 & 1 & 11.00\\
0 & 3 & -1.5 & -10.50\\
0 & -1.5 & 3.75 & 14.25
\end{array}\right]
$$

$$
\left[\begin{array}{lrr|r}
4 & -2 & 1 & 11.0\\
0 & 3 & -1.5 & -10.5\\
0 & 0 & 3 & 9.0
\end{array}\right]
$$

ذکر این نکته مهم است که عملیاتی که روی ماتریس انجام میگیرد، دترمینان ماتریس را دست نمیزند یا به عبارتی دترمینان ماتریس در طی تمامی این مراحل ثابت و بدون تغییر باقی می ماند. این واقعا شانس بزرگی است چون دترمینان ماتریس مثلثی خیلی ساده محاسبه میشود، که به عبارتی حاصلضرب المان های قطری ماتریس است، به عبارت دیگر:

$$
|\mathbf{A}| = |\mathbf{U}| = U_{11} \times U_{22} \times \cdots \times U_{nn} \tag{۲}
$$

فاز جایگزینی از انتها

مجهولات با استفاده از جایگذاری از انتها بدست خواهد آمد. حل معادلات a،b و c به صورت زیر است:

$x_3 = 9/3 = 3$

$x_2 = (-10.5 + 1.5x_3)/3 = [-10.5 + 1.5(3)]/3 = -2$

$x_1 = (11 + 2x_2 - x_3)/4 = [11 + 2(-2) - 3]/4 = 1$

الگوریتم برای روش حذفی گوس

فاز حذف

فرض کنید که k ردیف اول ماتریس A به فرم ماتریس بالا مثلثی در آمده باشند، بنابراین، معادله محوری فعلی معادله k ام است، و همه معادلات زیر آن هنوز باید تبدیل شوند. توجه کنید که اجزای A ضرایب معادلات اصلی نیستند (جز برای سطر اول). چون این ضرایب به وسیله روش حذفی بدست آمده اند. همین قضیه به بردار ثابت b اعمال میشود.

$$\begin{array}{cl}
\left[\begin{array}{ccccccccc|c}
A_{11} & A_{12} & A_{13} & \cdots & A_{1k} & \cdots & A_{1j} & \cdots & A_{1n} & b_1 \\
0 & A_{22} & A_{23} & \cdots & A_{2k} & \cdots & A_{2j} & \cdots & A_{2n} & b_2 \\
0 & 0 & A_{33} & \cdots & A_{3k} & \cdots & A_{3j} & \cdots & A_{3n} & b_3 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & A_{kk} & \cdots & A_{kj} & \cdots & A_{kn} & b_k \\
\hline
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & A_{ik} & \cdots & A_{ij} & \cdots & A_{in} & b_i \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & A_{nk} & \cdots & A_{nj} & \cdots & A_{nn} & b_n
\end{array}\right] &
\begin{array}{l}
\\ \\ \\ \\
\leftarrow \text{ردیف محوری} \\
\\ \\
\leftarrow \text{ردیف های تبدیل شده} \\
\\ \\
\end{array}
\end{array}$$

اجازه دهید که ردیف i ام یک ردیف نوعی زیر معادله محوری باشد که باید تبدیل گردد، به این معنا که المان A_{ik} باید حذف گردد. ما این قضیه را به وسیله ضرب کردن ردیف محوری در $\lambda = A_{ik}/A_{kk}$ و تفریق کردن آن از ردیف i ام ، بدست می آوریم.

تغییرات متناظر در ردیف i ام به صورت زیر هستند:

$$A_{ij} \leftarrow A_{ij} - \lambda A_{kj}, \quad j = k, k+1, \ldots, n \tag{۳}$$

$$b_i \leftarrow b_i - \lambda b_k$$

برای تبدیل ماتریس ضرایب به فرم ماتریس بالا مثلثی، k و i باید رنج $k=1,2,\ldots,n-1$ (به عنوان ردیف محوری) و $i=k+1, k+2,\ldots,n$ (به عنوان ردیفی که باید تبدیل شود). الگوریتم فاز حذف به صورت زیر در متلب نوشته میشود: